

Камін П.Ю.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Мішин О.В.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

АНАЛІТИЧНИЙ РОЗРАХУНОК СПЕКТРУ ШИРОТНО-ІМПУЛЬСНО МОДУЛЬОВАНОГО СИГНАЛУ

У роботі наведено розрахунок спектру широтно-імпульсно модульованого (ШІМ) сигналу, отриманого із застосуванням методики аналітичного розрахунку, що розроблена авторами і викладена у [1]. Актуальність даного напрямку досліджень обґрунтована значним розповсюдженням такого виду модуляції у радіокерованих системах (РКС) цивільного застосування. Спектральний аналіз такого сигналу є корисним для розробки самих РКС, вдосконалення методів їх детектування та для боротьби з негативним впливом радіозавад. Існують чисельні методи розрахунку таких спектрів, в той же час аналітичне представлення спектру є більш точним і зручним для використання в деяких випадках. Аналітичний розрахунок спектру ШІМ сигналу, на відміну від простіших випадків модуляції (амплітудна модуляція) є більш складним, одержання аналітичного виразу для ШІМ сигналу не є тривіальним.

В даній роботі було застосовано методику аналітичного розрахунку, що основана на перетворенні Фур'є і розбитті відповідного інтегралу на часові ділянки, що відповідають тривалості окремих імпульсів. Наведено проміжні математичні перетворення та результати застосування методики для випадку ШІМ модуляції синусоїдальним сигналом. Одержано аналітичний вираз для спектру такого сигналу, досліджено його основні властивості, та перевірено відповідність аналітичного виразу і результатів розрахункового експерименту. Результати можуть бути корисними, зокрема, для виділення різниці між одержаним спектром та спектром немодульованого сигналу. Це дозволить виділити частину сигналу, яка являє собою корисне інформаційне навантаження. Отриманий результат у перспективі дасть можливість застосувати методику для розрахунку спектрів більш складних ШІМ сигналів.

Наведено напрямки подальшого дослідження: застосування методики аналітичного розрахунку для складніших модулюючих сигналів, дослідження задачі виявлення та розпізнавання сигналів, та впливу шумів на спектр.

Ключові слова: широтно-імпульсна модуляція, радіокеровані системи, спектр імпульсного сигналу, ряд Фур'є, перетворення Фур'є, інформаційна складова спектру.

Постановка завдання. У виконавчих механізмах (блоках) типових систем дистанційного управління загального призначення у якості сигналу управління використовується широтно-імпульсна модуляція (ШІМ). Ця технологія широко розповсюджена також і у радіотехнічних системах. У якості практичного прикладу можна навести канали управління квадрокоптерів, моделей літаків, моделей наземних радіокерованих платформ, тощо. Не дивлячись на те, що більш досконалішими є цифрові системи передавання даних на основі радіоканалу, системи на базі ШІМ залишаються у використанні за рахунок простоти, малої вартості при достатньої надійності та прийнятності інших характеристик.

Для вирішення завдань забезпечення радіоелектронної сумісності, дослідження надійності

роботи радіоканалу, математичного забезпечення випробувань потрібно отримати загальний аналітичний вигляд і характеристики спектру ШІМ сигналу. У теорії найбільш точний спектр надає аналітичний метод розрахунку, як варіант із застосуванням методики [1]. Це питання вже піднімалося раніше як суто теоретичне і не отримало значного розвитку, оскільки велика кількість систем віддаленого управління не використовувала ШІМ. На теперішній час, внаслідок того, що виконавчі механізми сучасних систем [2] використовують ШІМ модуляцію, пошук досконалих методик аналітичного розрахунку спектру ШІМ сигналу є актуальним і потребує подальшого дослідження.

Аналіз останніх досліджень і публікацій показав, що предметна область обраного напрямку

досліджень є дуже актуальною, оскільки з'являється велика кількість публікацій, присвячених квадрокоптерам та іншим радіокерованим системам [3-8]. Велика частина цих систем використовує ШПМ сигнал у радіоканалі. В той же час у вищезгаданих публікаціях відсутні теоретичні дослідження щодо отримання спектру ШПМ сигналу.

Відповідно цього напрямку провадяться дослідження і є публікації, що оприлюднюють результати удосконалення методик розрахунку спектру ШПМ сигналу [9-12]. До загальних недоліків цих робіт можна віднести: вузьку спрямованість методик (придатність для окремих випадків), відсутність програмного моделювання; відносна складність математичного апарату, що обмежує її для практичного використання. В [1] оприлюднена методика на основі базової моделі сигналу, що дозволяє виправити виявлені недоліки попередніх робіт. В той же час у [1] наведений суто теоретичний приклад сигналу, що не використовується у практиці. Приклад призначений виключно для демонстрації працездатності методики. Для підтвердження ефективності і можливості використання методики потрібно знайти спектр реального ШПМ сигналу, що використовується у сучасних системах дистанційного управління на основі радіоканалу.

Постановка завдання. Метою статті є знаходження спектру ШПМ сигналу з використанням методики [1] на основі базової моделі сигналу для подальших досліджень у галузі розпізнавання (та інших напрямків) з урахуванням природних і промислових шумових завад.

Виклад основного матеріалу. Для постановки завдання введемо вихідні дані щодо сигналу управління і внесемо обмеження.

Нехай в якості сигналу, що буде підлягати переведенню у частотний спектральний вигляд буде використовуватися аналоговий ШПМ сигнал без модуляції радіочастотою. Часове ущільнення не застосовується.

Частота повторення імпульсів не змінюється. Звичайно, що для передавання сигналу через радіоэфір використовуються імпульси, що модульовані високою частотою. В даній роботі введемо обмеження щодо відсутності високочастотного заповнення. В практичних РКС період сигналу визначається приблизно в діапазоні 50–60 Гц.

В якості базової імпульсної послідовності для вищеприданого сигналу обираємо послідовність прямокутних відеоімпульсів, що застосована у [1]. Ця періодична послідовність має фіксований період, амплітуду і тривалість імпульсів. Під

час знаходження спектру ШПМ сигналу будемо застосовувати термін – базова модель сигналу (БМС), що введений у [1].

Використаємо методику [1] для аналітичного розрахунку ШПМ сигналу, що буде промодульований синусоїдальним сигналом. Отриманий результат в перспективі буде розповсюджений на моделювання сигналом довільної форми, з певною точністю.

1. Перший етап знаходження частотного спектру ШПМ сигналу.

Відома формула для розрахунку спектру з використанням перетворення Фур'є визначається виразом (3) і застосована у методиці [1].

$$s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (1)$$

Відповідно методиці, потрібно розділити (1), на суму інтегралів. Кожний елемент цієї суми буде відповідати інтегралу, взятого на тривалості відповідного імпульсу БМС. Пронумеруємо імпульси (і відповідні інтеграли) БМС так, що нульовим імпульсом буде той, що розділений віссю ординат на 2 частини (рис. 1) [1]. Імпульси, що знаходяться на від'ємній частині вісі абсцис мають номери -1, -2, ..., а на позитивній частині – +1, +2, ...

Введемо позначення для результату інтегрування кожного елемента I_j у інтегралі (1), отримаємо:

$$s(\omega) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{jT-\frac{T}{2}}^{jT+\frac{T}{2}} A e^{-i\omega t} dt = \sum_{j=-\infty}^{\infty} I_j \quad (2)$$

В виразі (2) значення I_j є результатом знаходження визначеного інтегралу, що відповідає імпульсу з номером j .

На наступному етапі знаходиться інтеграл для нульового імпульсу I_0 та довільного I_j . Шляхом алгебраїчних перетворень можна виразити I_j через I_0 і обчислити таким чином суму (2). Конкретний вигляд запису I_j через I_0 залежить від обраного виду модуляції, але, як правило, включає в себе множення на експоненту зсуву. Наприклад, якщо всі імпульси однакові (модуляція відсутня), це є єдиною відмінністю між I_0 та I_j :

$$I_j = \int_{jT-\frac{T}{2}}^{jT+\frac{T}{2}} A e^{-i\omega t} dt = I_0 e^{-ij\omega T} \quad (3)$$

У нескінченних періодичних сигналах спектр є дискретним. Цей результат отримується при аналізі одержаної суми і її залежності від частоти. Для таких сигналів, кінцевим результатом буде сукупність опису частот з ненульовими складовими, та виразу для обчислення цих складових.

2. Другий етап знаходження частотного спектру ШІМ сигналу.

Розглянемо послідовність імпульсів, модульовану по ширині імпульсу синусоїдальним сигналом з частотою Ω , що набагато менша за частоту повторення імпульсів БМС. У цьому випадку для ширини імпульсу справедливий такий запис:

$$\tau \rightarrow \tau(t) = \tau_0 + \Delta\tau \sin(\Omega t). \quad (4)$$

Будемо вважати, що модуляція відбувається так, що зміна ширини імпульсів не зсуває їх середину, симетрично зсуваючи обидва фронту імпульсу відповідно закону модуляції однією частотою Ω , що є типовим видом ШІМ модуляції у мікроконтролерах архітектури ARM CortexM [11, 12].

У контексті застосування методики [1] і не змінюючи загального характеру досліджень розглянемо послідовність ШІМ сигналу на одному періоді модуляції. Введемо позначку N , що буде відповідати кількості імпульсів БМС в одному періоді Ω для ШІМ сигналу. Тоді, з урахуванням введених позначень, значення I_j для ШІМ сигналу співпадає з (3), за винятком того, що τ вже не є константою а функцією часу і відповідає закону модуляції (4):

$$I_j = A\tau(t) \frac{\sin\left(\tau(t) \frac{\omega}{2}\right)}{\tau(t) \frac{\omega}{2}} e^{-i\omega j T}. \quad (5)$$

Для зручності підстановки, розіб'ємо синус на різницю експонент, і розглянемо окремо отримані доданки: $I_j = \frac{I_{+j} - I_{-j}}{2i}$.

Позитивна частина буде визначатися виразом (6)

$$\begin{aligned} I_{+j} &= \frac{A}{\omega} e^{i \frac{\omega \tau(t)}{2}} \cdot e^{-i\omega j T} = \frac{A}{\omega} e^{i \frac{\omega \tau_0}{2}} e^{i \frac{\omega \Delta \tau \sin(\Omega j T)}{2}} \\ &= I_{+0} e^{i \frac{\omega \Delta \tau \sin(\Omega j T)}{2}} \cdot e^{-i\omega j T} \end{aligned} \quad (6)$$

Перепишемо першу експоненту, використавши тотожність Якобі-Ангера:

$$e^{i \frac{\omega \Delta \tau \sin(\Omega j T)}{2}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n \left(\frac{\omega \Delta \tau}{2} \right) e^{in\Omega j T} \quad (7)$$

Тут J_n – n -та функція Бесселя 1-го порядку. Підставивши цей результат в (6), і взявши суму за всіма I_{+j} за один період, отримаємо:

$$\begin{aligned} I_{+j} &= I_{+0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n \left(\frac{\omega \Delta \tau}{2} \right) e^{in\Omega j T} \cdot e^{-i\omega j T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_{+0} J_n \left(\frac{\omega \Delta \tau}{2} \right) e^{i(n\Omega - \omega)j T} \\ \sum_{j=0}^{N-1} I_{+j} &= \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_{+0} J_n \left(\frac{\omega \Delta \tau}{2} \right) e^{i(n\Omega - \omega)j T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{N-1} I_{+0} J_n \left(\frac{\omega \Delta \tau}{2} \right) e^{i(n\Omega - \omega)j T} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_{+0} J_n \left(\frac{\omega \Delta \tau}{2} \right) \sum_{j=0}^{N-1} e^{i(n\Omega - \omega)j T} \end{aligned} \quad (8)$$

Тут зміна порядку сумування дозволяє винести за дужки незалежні від j складові.

Розглянемо внутрішню суму. Якщо вираз в дужках $(n\Omega - \omega)T$ кратний 2π , то ця сума вироджується в суму N одиниць, тобто просто N . В іншому випадку ми маємо суму геометричної прогресії:

$$\sum_{j=0}^{N-1} e^{i(n\Omega - \omega)j T} = \frac{1 - e^{i(n\Omega - \omega)NT}}{1 - e^{i(n\Omega - \omega)T}} \quad (9)$$

Оскільки сигнал періодичний з частотою Ω , то ненульові значення спектру можуть бути лише на частотах, кратних Ω , а для таких частот чисельник буде рівним нулю (оскільки вираз в експоненті буде кратний $\Omega NT = 2\pi$).

Таким чином, внутрішня сума (8) є ненульовою лише при $\omega = n\Omega + 2k\pi/T$, і рівна N в цьому випадку:

$$\sum_{j=0}^{N-1} I_{+j} = NI_{+0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n \left(\frac{\omega \Delta \tau}{2} \right) \quad (10+)$$

Перетворення аналогічні (6-9) для I_{-j} дадуть результат що представлений наступним виразом:

$$\sum_{j=0}^{N-1} I_{-j} = NI_{-0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n \left(\frac{-\omega \Delta \tau}{2} \right) \quad (10-)$$

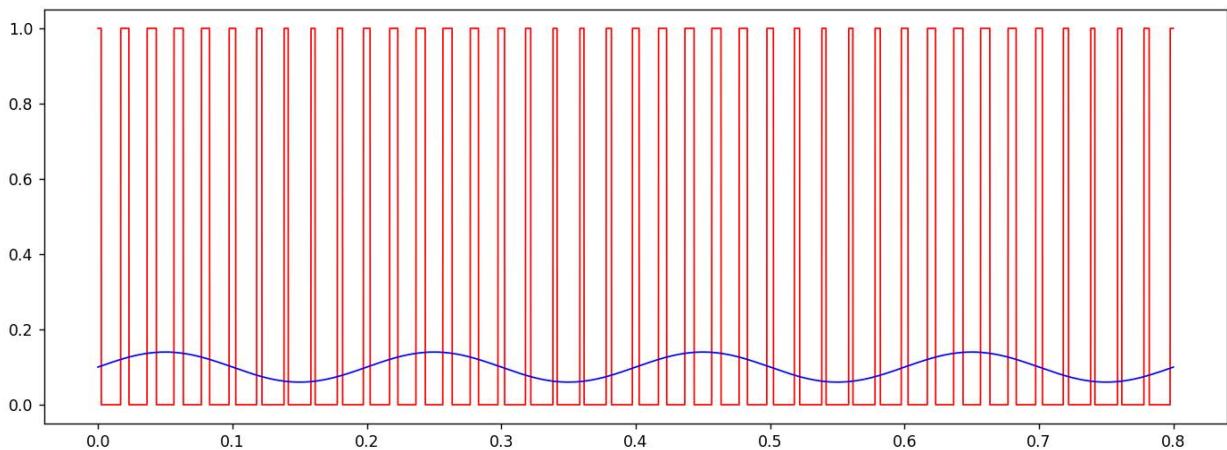


Рис. 1. Приклад ШІМ сигналу і відповідної модулюючої синусоїди

3. Аналіз результатів.

Остаточну формулу отримуємо, підставивши отримані результати з формул (10+) та (10-) до виразу

$$I_j = \frac{I_{+j} - I_{-j}}{2i}$$

Доданки що відповідають $n=0$ дають значення спектру на частотах $\omega=2k\pi/T$. Це частоти спектру немодульованого сигналу. Використаємо наступну властивість функцій Бесселя: функції з парними номерами є парними, а функції з непарними номерами-непарними. Тоді:

$$S\left(\omega = \frac{2k\pi}{T}\right) = N \frac{(I_{-0} - I_{+0})}{2} J_0\left(\frac{\omega\Delta\tau}{2}\right) = J_0\left(\frac{\omega\Delta\tau}{2}\right) \frac{\sin\left(\tau_0 \frac{\omega}{2}\right)}{\tau_0 \frac{\omega}{2}}$$

Правий множник співпадає зі спектром немодульованого сигналу, а лівий множник-константа. Таким чином $n=0$ дає нам гармоніки, що відповідають немодульованому сигналу, домножені на константу.

Кожне наступне значення n буде відповідати відповідній бічній гармоніці, що відступає від основної на $n\Omega$.

Отримали наступний результат: щільність спектру рівна нулю для всіх частот, крім частот кратних частоті імпульсів, та частот, що відхиляються від них на цілу кількість модулюючих частот, і ці ненульові складові можна виразити наступним чином:

$$S\left(\omega = \frac{2k\pi}{T} + n\Omega\right) = J_n\left(\frac{\omega\Delta\tau}{2}\right) \frac{A}{\omega} \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right); n = 2k, (11.1)$$

$$S\left(\omega = \frac{2k\pi}{T} + n\Omega\right) = J_n\left(\frac{\omega\Delta\tau}{2}\right) \frac{A}{i\omega} \cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right); n = 2k + 1. (11.2)$$

На рис. 2 і рис. 3 наведений приклад застосування отриманих формул. На рис. 2 червоним зображено спектр модульованого сигналу, синім – огинаюча, обчислена для немодульованого сигналу(для порівняння), зеленим – огинаюча, обчислена за (11.1) для $n=0$.

Одержаний аналітичний результат і результат розрахункового експерименту достатньо точно збігаються.

4. Аналіз одержаного спектру.

Основними відмінностями одержаного спектру від спектру немодульованого сигналу є зміна

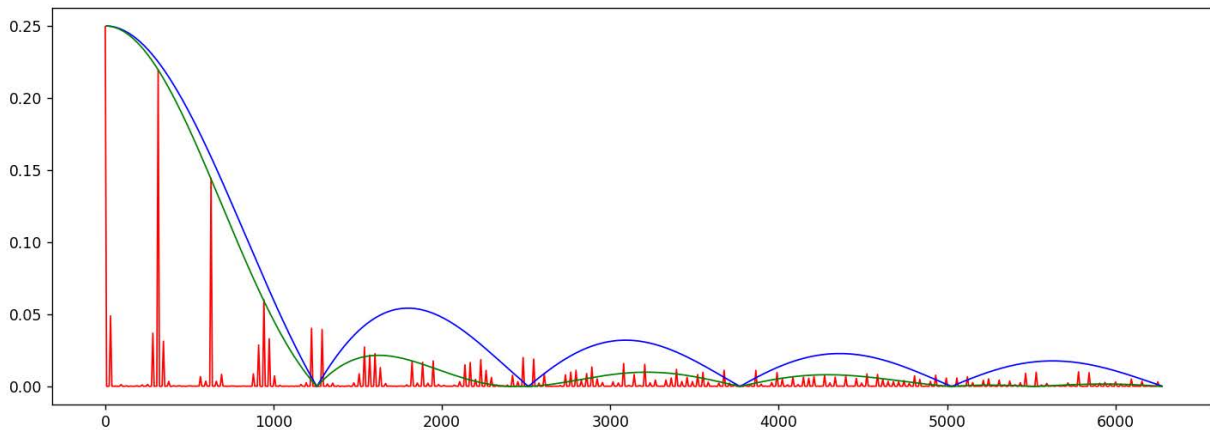


Рис. 2. Спектр ШІМ і огинаюча нульової гармоніки, розрахована за формулою (11.1)

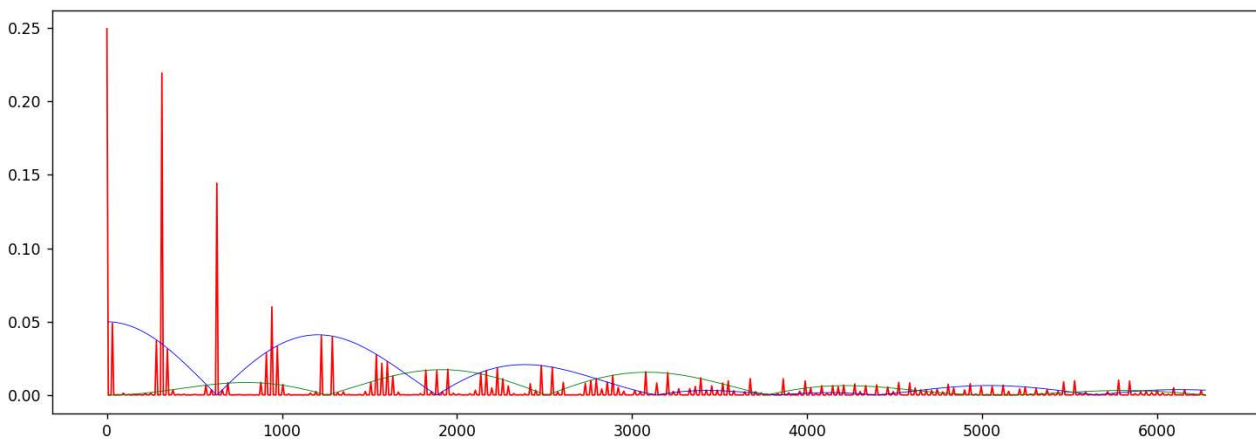


Рис. 3. Спектр ШІМ і огинаючі перших двох гармонік, розрахованих за формулами (11)

висот основних максимумів та наявність бічних гармонік. Ці відмінності несуть в собі інформацію про модулюючий сигнал: відхилення бічних гармонік відповідають частоті цього сигналу, а їх амплітуди, як і зміни амплітуд основних гармонік, залежать від інтенсивності цього сигналу (через зміну ширини сигналів).

Для розглянутих обмежень (частота модулюючого сигналу значно більша за частоту імпульсів, а зміна ширини імпульсу невелика в порівнянні з базовою шириною) гармоніки швидко спадають зі зростанням n , особливо для малих частот. Відносна амплітуда бічних гармонік є максимальною для частот, що відповідають першим максимумам і першій гармоніці: $n=1, -1$; $k=0, 1$. Можна очікувати що приймаючий пристрій може з більшою ефективністю розпізнавати корисний сигнал якщо він буде налаштований саме на цих частотах.

Подальша робота буде проводитись в наступних напрямках:

1. Узагальнення результату для випадку модуляції складним сигналом
2. Вплив природних і промислових шумів на спектр сигналу.
3. Дослідження впливу змін спектру на виявлення і розпізнавання сигналу.

Висновки. Показана ефективність методики розрахунку спектру на основі БМС, що розроблена у [1].

Застосовано методику аналітичного розрахунку спектру до широтно-імпульсно модульованого сигналу. Одержаний результат відповідає дійсності для випадку модуляції синусоїдальним сигналом. Проаналізовано відмінності від немодульованого сигналу. Саме ці відмінності несуть інформацію про модулюючий сигнал, і є критичними для його розпізнавання.

Список літератури:

1. Мішин О.В., Катін П.Ю. Методика для спрощення аналітичного розрахунку спектру складних імпульсних сигналів в системах радіокерування. Вчені записки ТНУ імені В.І. Вернадського. Серія: технічні науки. 2024. Том 35 (74) № 5. С. 38–44.
2. Katin, Pavlo and Chmelov, Viacheslav and Shemaev, Vladimir, Development of Typical ‘State’ Software Patterns for CortexM Microcontrollers in Real Time (June 26, 2020). Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 3(9 (105)), 29–38, 2020, doi: 10.15587/1729-4061.2020.205377, Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=3719729>
3. Сушин І.О., Буткевич Г.Ю. Методика оцінки зв'язності вузлів бездротової сенсорної мережі при умові використання багаторівневої мережі телекомунікаційних аероплатформ. Вчені записки ТНУ імені В.І. Вернадського. Серія: технічні науки. 2023. Том 34 (73) № 6. С. 39–45. <https://doi.org/10.32782/2663-5941/2023.6/07>
4. Сайко В.Г. Наритник Т.М. Модель забезпечення функціонування інтегрованої інфраструктури на базі літаючої мережі БПЛА. Вчені записки ТНУ імені В.І. Вернадського. Серія: технічні науки. 2023. Том 34 (73) № 4. С. 5–10. <https://doi.org/10.32782/2663-5941/2023.4/02>
5. Довбиш І.О. Муравйов О.В. Галаган Р.М. Богдан Г.А. Момот А.С. Силові установки та джерела енергії сучасних БПЛА. 2023. Вчені записки ТНУ імені В.І. Вернадського. Серія: технічні науки. Том 34 (73) № 5. С. 16–20. DOI <https://doi.org/10.32782/2663-5941/2023.5/04>
6. Муравйов О.В., Довбиш І.О., Галаган Р.М., Богдан Г.А., Момот А.С. Перспективи розвитку технологій та підвищення рівня автономності БПЛА. Вчені записки ТНУ імені В.І. Вернадського. Серія: технічні науки. 2023. Том. 34 (73). № 2. С. 199–205.
7. Є.В. Вербицький. Особливості розрахунку спектру напруги, модульованої по закону ШІМ I і II на основі подвійного ряду Фур'є. 2015. ElectronComm, Vol. 20, №5(88). С. 36–45.
8. Похиленко О., Катін, П. ПАТЕРН «СТАН» ДЛЯ ВБУДОВАНИХ СИСТЕМ З МОЖЛИВІСТЮ ДИНАМІЧНОГО СТВОРЕННЯ СТАНІВ. Технічні науки та технології, (1(23)), 118–127. [https://doi.org/10.25140/2411-5363-2021-1\(23\)-118-127](https://doi.org/10.25140/2411-5363-2021-1(23)-118-127)
9. AN4776 Application note General-purpose timer cookbook for STM32 microcontrollers. <https://www.st.com/>
10. Zi Tao1, a, Li Zhi2,b, Jia Long3. The SPWM Pulse Width Signal Spectrum Analysis Based on MATLAB Advanced Materials Research Online. 2013. Vols. 756-759, pp 4147–4151 doi:10.4028/www.scientific.net/AMR.756-759.4147.
11. Soumya S. Dr. B. V. Sumangala. Application Of Space Vector Modulation Technique For Three Level Neutral Point Clamped Inverters. International Journal of Engineering Research & Technology (IJERT). 2013. Vol. 2 Issue 6. С. 2909–2913 www.ijert.org.
12. Hang Zhu, Yubin Lan, Wenfu Wu. Development of a PWM Precision Spraying Controller for Unmanned Aerial Vehicles. College of Biological and Agricultural Engineering, Jilin University, Changchun 130022, P. R. China <https://www.ars.usda.gov/>

Katin P.V., Mishyn O.Yu. ANALYTICAL CALCULATION OF THE SPECTRUM OF A PULSE WIDTH MODULATED SIGNAL

This work presents the calculation of the spectrum of a pulse-width modulated (PWM) signal performed using the analytical calculation method developed by the authors and presented in [1]. The relevance of this research direction is justified by the widespread usage of this type of modulation in radio-controlled systems (RCS) for civilian use. Spectral analysis of such a signal is useful for the development of RCSs themselves, as well as improving their detection methods and combating the negative impact of radio interference. There are numerical methods for calculating such spectra, but at the same time the analytical representation of the spectrum would be more accurate and convenient for some use cases. Analytical calculation of the spectrum of a PWM signal, in contrast to simpler cases of modulation (amplitude modulation), is more complex, obtaining an analytical expression for a PWM signal is not trivial.

In this work, the analytical calculation method was applied, which is based on the Fourier transform and the division of the corresponding integral into time segments corresponding to the duration of individual pulses. Intermediate mathematical transformations and the results of applying the method for the case of PWM modulation by a sinusoidal signal are presented. An analytical expression for the spectrum of such a signal is obtained, its main properties are analyzed, and the correlation of the analytical expression and the results of the calculation experiment is checked. The results can be useful, in particular, for highlighting the difference between the obtained spectrum and the spectrum of the unmodulated signal. This will allow highlighting the part of the signal that represents the useful information load.

The obtained result will make it possible to apply the method in the future to calculate the spectra of more complex PWM signals.

Directions for further research are presented: application of the analytical calculation method for more complex modulating signals, study of the problem of signal detection and recognition, and the influence of noise on the spectrum.

Key words: *pulse-width modulation, radio controlled systems, spectrum of pulse signal, Fourier series, Fourier transform, information component of the spectrum.*